

COMSM1302 電腦架構概論

卡諾圖化簡 15 題精練

真值表 $\rightarrow$ K-Map $\rightarrow$ 最簡布林式 $\rightarrow$ 邏輯閘圖
(2 變數 $\times 2$ 、3 變數 $\times 6$ 、4 變數 $\times 6$ 、5 變數 $\times 1$)

Week 1 補充練習 (逐題詳解)

2026 年 7 月

本練習的目標與方法。每一題都走完同一條完整流程：

1. **讀題**：從真值表（或功能描述）確認哪些輸入組合輸出 1（即**最小項 minterm**）；
2. **填圖**：把 1 填進卡諾圖——注意行列都用 **格雷碼**順序 (00, 01, 11, 10)，相鄰格只差一個位元；
3. **圈群**：把 1 圈成 2^k 大小的矩形 (1, 2, 4, 8, ... 格)，**越大越好、可重疊、可迴繞**（左右相接、上下相接、四角相接）；
4. **讀項**：每個群裡「不變的變數」留下 (1 留原變數、0 留反相)，「有變的變數」消去—— 2^k 格的群恰好消 k 個變數；
5. **接電路**：最簡 SOP (sum of products) = 反相器 + AND 層 + OR 層；最後代回真值表驗算。

記號慣例：變數依 A, B, C, D, E 由高位到低位，最小項編號 m_i 的 i 就是把該列輸入讀成二進位（例如 3 變數的 m_5 是 $A=1, B=0, C=1$ ）。邏輯閘一律用 2 輸入閘（配合 Logisim 與 NAND 板的習慣），必要時註明多輸入閘的替代畫法。

目錄

1	第 1 題 (2 變數)：任一感測器觸發警報—— $A \vee B$	3
2	第 2 題 (2 變數)：樓梯雙控開關—— $A \oplus B$	4
3	第 3 題 (3 變數)：偶數偵測器——一個群消兩個變數	5
4	第 4 題 (3 變數)：三人多數決——三個重疊的對子	6

5 第 5 題 (3 變數): 兩個必要群自動蓋滿全圖	7
6 第 6 題 (3 變數): 三個對子缺一不可	9
7 第 7 題 (3 變數): 循環卡諾圖——最簡解不唯一	10
8 第 8 題 (3 變數): 奇同位產生器——棋盤格	12
9 第 9 題 (4 變數): 四角迴繞—— $\neg B \wedge \neg D$	13
10 第 10 題 (4 變數): 中央方塊—— $B \wedge D$	14
11 第 11 題 (4 變數): 8 格大群+補一對—— $\neg B \vee (A \wedge C \wedge D)$	15
12 第 12 題 (4 變數): 4 格群+上下迴繞對——提取公因式	17
13 第 13 題 (4 變數): 兩個 4 格群—— $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$	19
14 第 14 題 (4 變數): 質數偵測器——必要項與自由選擇	20
15 第 15 題 (5 變數): 雙層卡諾圖—— $(\neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge E)$	22
16 總結: 15 題速查表	23

1 第 1 題 (2 變數): 任一感測器觸發警報—— $A \vee B$

題目

一個警報系統有兩個感測器 A 、 B ($1 = \text{觸發}$)。只要至少一個感測器觸發，警報 f 就要響。真值表如下，請用卡諾圖求出最簡布林式並畫出電路：

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

解答

第一步：填圖。最小項 $= \{m_1, m_2, m_3\}$ ：

		B	
		0	1
A	0	0	1
	1	1	1

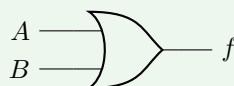
第二步：圈群（兩個 2 格群，重疊在 m_3 ）。

- 右欄 (m_1, m_3): 框內 A 有 0 有 1 (消去), $B = 1$ 不變 $\Rightarrow$ 項為 B ;
- 下列 (m_2, m_3): B 有變 (消去), $A = 1$ 不變 $\Rightarrow$ 項為 A 。

第三步：最簡式。

$$f = A \vee B$$

第四步：電路（1 個 OR 閘）。



驗算： $A=0, B=0 \Rightarrow 0$ ✓；其餘三列皆 1 ✓。

教學重點：重疊是合法的。 m_3 同時被兩個群圈住——完全沒問題：OR 的世界裡「一格被算兩次」不改變結果（等幂律 $x \vee x = x$ ）。新手常犯的錯是把圖切成「互不重疊的拼圖」，反而圈出比較小的群、留下多餘的變數。

2 第 2 題 (2 變數): 樓梯雙控開關—— $A \oplus B$

題目

樓梯上下各有一個開關 A 、 B ，扳動任一個開關都要讓燈的狀態反轉；約定兩個開關同為 0 或同為 1 時燈滅。真值表：

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

用卡諾圖化簡，並討論結果。

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_1, m_2\}$ ：

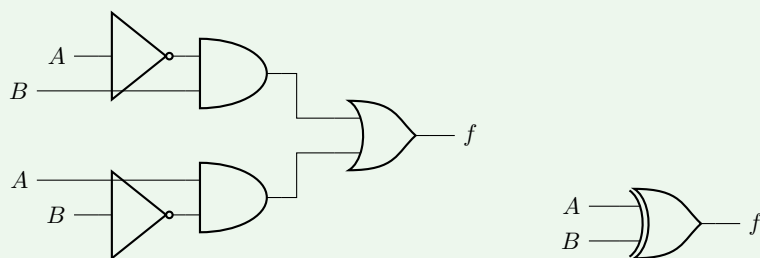
		B	
		0	1
A	0	0	1
	1	1	0

第二步：圈群——圈不起來！兩個 1 在對角線上： $m_1(01)$ 與 $m_2(10)$ 差了兩個位元，在卡諾圖上不相鄰（相鄰的定義是恰差一位）。只能各自圈成 1 格的群，一個變數都消不掉。

第三步：最簡 SOP 就是原式。

$$f = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = A \oplus B$$

第四步：電路。用基本閘要 5 個（2 NOT + 2 AND + 1 OR）；若允許 XOR 閘則 1 個就好。



驗算：01 $\rightarrow$ 1 ✓、10 $\rightarrow$ 1 ✓、00, 11 $\rightarrow$ 0 ✓。

教學重點: 卡諾圖的極限。K-map 只會合併「漢明距離 1」的格子；XOR 的 1 恰好兩兩距離 2 (對角、棋盤)，所以永遠化簡不動。看到對角 1 就要想到 XOR / XNOR——這在第 8 題 (三變數同位) 會再放大一次。

3 第 3 題 (3 變數): 偶數偵測器——一個群消兩個變數

題目

輸入 A, B, C 是一個 3 位元二進位數 (A 為最高位)。當這個數是偶數時 $f = 1$ 。真值表:

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

解答

第一步: 填圖。最小項 = $\{m_0, m_2, m_4, m_6\}$:

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	0	0	1
	1	1	0	0	1

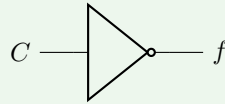
第二步: 圈群 (一個 4 格群, 左右迴繞)。四個 1 落在 $BC = 00$ 與 $BC = 10$ 兩個端欄——格雷碼下這兩欄左右相接, 合成一個 2×2 的群。框內 A 有變 (消去)、 B 有變 (消去), 只有 $C = 0$ 不變。

第三步: 最簡式。4 = 2^2 格的群消掉 2 個變數, 三個變數只剩一個:

$$f = \neg C$$

(道理也很直觀: 偶數 $\iff$ 最低位 $C = 0$, 與高位無關。)

第四步: 電路 (1 個 NOT 閘)。



驗算：所有 $C = 0$ 的列輸出 1、 $C = 1$ 的列輸出 0 ✓（ A 、 B 腳位留空不接）。

教學重點：群的大小＝化簡的力量。 2^k 格的群恰好消 k 個變數：2 格消 1 個、4 格消 2 個、8 格消 3 個。所以圈群永遠先試最大的——這題若圈成四個 1 格群，會得到冗長的原始 SOP；圈成兩個 2 格群，得到 $\neg B \neg C \vee B \neg C$ （還要再代數化簡）；一次圈 4 格才直接得到 $\neg C$ 。也別忘了迴繞：格雷碼讓最左欄與最右欄相鄰。

4 第 4 題 (3 變數): 三人多數決——三個重疊的對子

題目

委員會三人 A, B, C 投票（1 = 贊成），過半數贊成時議案通過（ $f = 1$ ）。真值表：

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_3, m_5, m_6, m_7\}$ ：

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

第二步：圈群（三個 2 格群，全部疊在 m_7 上）。

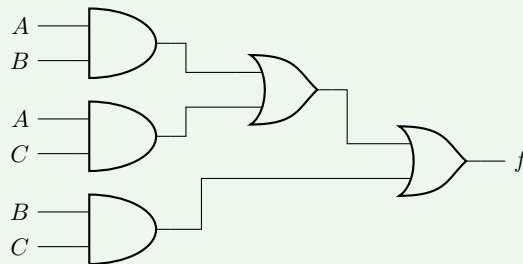
- $\{m_3, m_7\}$ ($BC=11$ 整欄): A 消去 $\Rightarrow B \wedge C$;
- $\{m_5, m_7\}$ (下列中間兩格): B 消去 $\Rightarrow A \wedge C$;
- $\{m_6, m_7\}$ (下列右端兩格): C 消去 $\Rightarrow A \wedge B$ 。

沒有 4 格群可圈 (四個 1 不構成矩形), 且三個對子缺一不可: m_3 只有第一群蓋、 m_5 只有第二群、 m_6 只有第三群——三者都是 **必要質蘊涵項 (essential prime implicant)**。

第三步: 最簡式。

$$f = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

第四步: 電路 (3 AND + 2 OR = 5 個 2 輸入閘)。



驗算: 恰一票 (m_1, m_2, m_4): 三個 AND 都是 0 $\Rightarrow f=0$ ✓; 兩票 (如 m_6 : $AB=1$) $\Rightarrow f=1$ ✓; 三票全 1 ✓。

教學重點: 多數決是「重疊」的經典。 m_7 (全贊成) 被三個群共用, 讓每個群都能湊成一對、各消一個變數。這個函數也是全加器 (full adder) 的進位輸出 $C_{out} = AB \vee AC \vee BC$ ——第 2 週會再遇到它。

5 第 5 題 (3 變數): 兩個必要群自動蓋滿全圖

題目

求下列真值表的最簡布林式與電路:

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_0, m_4, m_5, m_7\}$ ：

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

第二步：圈群——從「最挑剔」的 1 下手。

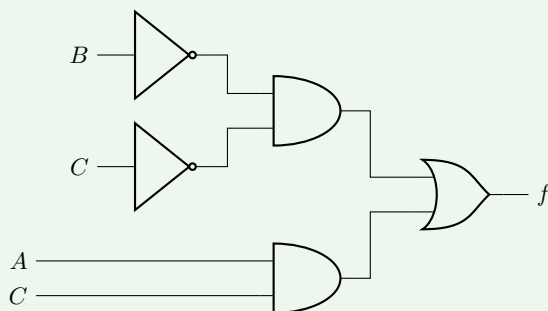
- m_0 (000) 的相鄰格中只有 m_4 是 1 $\Rightarrow$ 唯一的選擇是 $\{m_0, m_4\}$ ($BC=00$ 整欄)：A 消去 $\Rightarrow \neg B \wedge \neg C$ (必要)；
- m_7 (111) 的相鄰格中只有 m_5 是 1 $\Rightarrow$ 唯一的選擇是 $\{m_5, m_7\}$ ：B 消去 $\Rightarrow A \wedge C$ (必要)。

兩個必要群已把 m_4 、 m_5 一併蓋住——全圖覆蓋完成，不需要第三個群（例如 $\{m_4, m_5\} = A \neg B$ 是質蘊涵項，但多餘）。

第三步：最簡式。

$$f = (\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge C)$$

第四步：電路 (2 NOT + 2 AND + 1 OR = 5 閘)。



驗算: $m_0: \neg B \neg C = 1$ ✓; $m_5(101): AC = 1$ ✓; $m_6(110):$ 兩項皆 0 $\Rightarrow 0$ ✓; $m_4(100): \neg B \neg C = 1$ ✓。

教學重點: 先找「只有一種圈法」的 1。系統化流程是: 對每個 1 問「它能參加哪些最大群?」——只有一個候選的, 就是**必要群**, 先圈; 圈完常常發現其他 1 已被順便蓋住, 剩下的再挑最少的群補滿。這避免「看哪順眼圈哪」導致多圈或漏圈。

6 第 6 題 (3 變數): 三個對子缺一不可

題目

求下列真值表的最簡布林式與電路:

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

解答

第一步: 填圖。最小項 = $\{m_1, m_2, m_3, m_7\}$:

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	0	0	1	0

第二步: 圈群。沒有 4 格矩形; 逐一檢查每個 1 的歸宿:

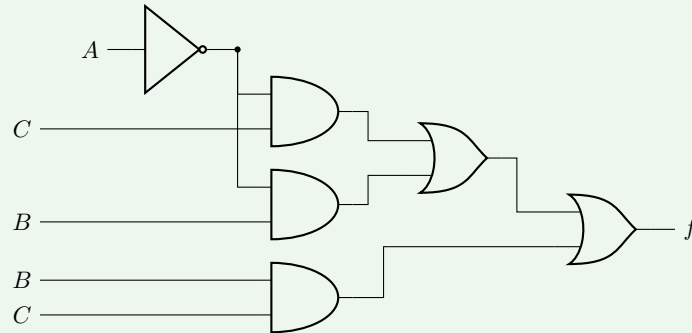
- m_1 只能和 m_3 成對 (上列中間): B 消去 $\Rightarrow \neg A \wedge C$ (必要);
- m_2 只能和 m_3 成對 (上列右端): C 消去 $\Rightarrow \neg A \wedge B$ (必要);
- m_7 只能和 m_3 成對 ($BC=11$ 整欄): A 消去 $\Rightarrow B \wedge C$ (必要)。

m_3 被三個群共用 (它是全圖「樞紐」), 三個對子缺一不可。

第三步: 最簡式。

$$f = (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge C)$$

第四步: 電路——共用一個反相器! $\neg A$ 出現在兩個乘積項裡, 接線時只要一顆 NOT: 共 1 NOT + 3 AND + 2 OR = 6 閘。



驗算: $m_5(101)$: $\neg AC = 0$, $\neg AB = 0$, $BC = 0 \Rightarrow 0$ ✓; $m_3(011)$: 三項全 1 $\Rightarrow 1$ ✓; $m_7(111)$: $BC = 1$ ✓。

教學重點: 最簡式 $\neq$ 最少接線。K-map 給的是乘積項最少、每項字面值最少的 SOP; 真正接電路時還能再省——共用反相器、共用子項都是常規操作 (本題 $\neg A$ 分給兩個 AND 用)。也可以再做代數提取: $f = \neg A(B \vee C) \vee BC$, 變成 1 NOT + 2 AND + 2 OR = 5 閘——化簡到 SOP 之後仍值得多看一眼。

7 第 7 題 (3 變數): 循環卡諾圖——最簡解不唯一

題目

求下列真值表所有的最簡布林式:

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_0, m_1, m_2, m_5, m_6, m_7\}$ (0 反而只有兩個: m_3, m_4):

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	1

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	1

解 1: $\neg A \neg B \vee AC \vee B \neg C$

解 2: $\neg A \neg C \vee \neg BC \vee AB$

第二步：圈群——發現「循環」。六個 1 圍成一圈，每個 1 恰好有兩個相鄰的 1，六個質蘊涵項（都是對子）首尾相扣：

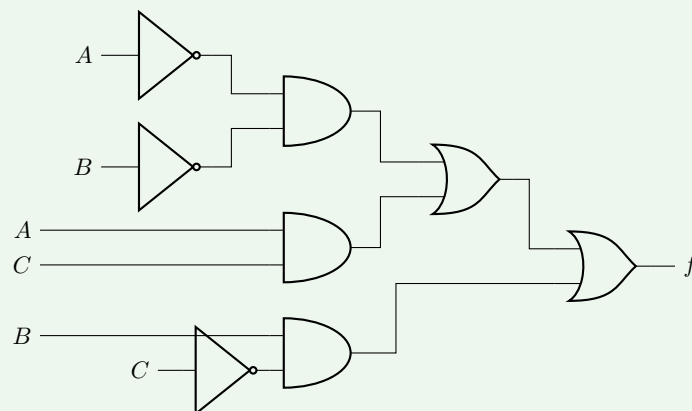
$$\neg A \neg B, \neg BC, AC, AB, B \neg C, \neg A \neg C.$$

沒有任何一個是必要的（每個 1 都有兩個群可選）！蓋滿六個 1 至少要 3 個對子，且必須「隔一個取一個」——恰有兩種取法：

- 解 1: $\{m_0, m_1\}, \{m_5, m_7\}, \{m_2, m_6\} \Rightarrow f = \neg A \neg B \vee AC \vee B \neg C$;
- 解 2: $\{m_0, m_2\}, \{m_1, m_5\}, \{m_6, m_7\} \Rightarrow f = \neg A \neg C \vee \neg BC \vee AB$ 。

$$f = \neg A \neg B \vee AC \vee B \neg C = \neg A \neg C \vee \neg BC \vee AB \quad (\text{兩解同樣最簡})$$

第四步：電路（取解 1；3 NOT + 3 AND + 2 OR）。



驗算（抽 m_3, m_4 兩個 0）： $m_3(011)$: $\neg A \neg B = 0, AC = 0, B \neg C = 0 \Rightarrow 0$ ✓; $m_4(100)$: 三項皆 0 ✓。再抽 m_0 : $\neg A \neg B = 1$ ✓。

教學重點：「最簡」可以不只一個。循環圖（cyclic K-map）裡沒有必要質蘊涵項，兩組互補的圈法一樣好——考試時任一組都是滿分。但務必完整寫出一組就好，混搭兩組會多圈出第 4 個群。順帶一提：0 很少時，改圈 0（求 $\neg f$ 再取反，得 POS 形式）往往更快： $\neg f = \neg ABC \vee A \neg B \neg C$ 。

8 第 8 題 (3 變數): 奇同位產生器——棋盤格

題目

通訊時要替 3 位元資料 A, B, C 產生同位位元: 當資料中 1 的個數是奇數時 $f = 1$ 。真值表:

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

解答

第一步: 填圖。最小項 = $\{m_1, m_2, m_4, m_7\}$:

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	1	0	1
	1	1	0	1	0

第二步: 圈群——棋盤格, 全部孤立。每個 1 的上下左右 (含迴繞) 全是 0: 任何兩個 1 之間漢明距離都是 2。K-map 一格都合併不了, 最簡 SOP 就是四個最小項:

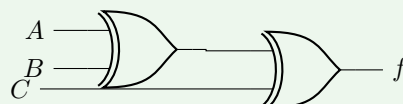
$$f = \neg A \neg B C \vee \neg A B \neg C \vee A \neg B \neg C \vee A B C$$

第三步: 換個代數角度。把前兩項與後兩項分組提取:

$$f = \neg A(B \oplus C) \vee A \neg(B \oplus C) = A \oplus B \oplus C.$$

$$f = A \oplus B \oplus C \quad (\text{奇同位})$$

第四步: 電路。SOP 直譯要 3 NOT + 8 AND (3 輸入項拆成 2 輸入) + 3 OR ≈ 14 閘; 用 XOR 只要 2 個閘:



驗算: $m_7(111)$: $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ ✓ (三個 1 是奇數); $m_3(011)$: $0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$ ✓。

教學重點: 認得棋盤格。K-map 上 1 與 0 呈國際象棋棋盤分布 $\Rightarrow$ 函數是 XOR (同位) 家族, 直接寫 $\oplus$ 串接, 別硬用 SOP 接一大坨閘。這也解釋了為什麼加法器的和位元 $S = A \oplus B \oplus C_{in}$ 天生就用 XOR 蓋——它就是奇同位。(對比: 第 4 題的進位 C_{out} 是多數決。)

9 第 9 題 (4 變數): 四角迴繞—— $\neg B \wedge \neg D$

題目

求下列真值表 (A 為最高位) 的最簡布林式與電路:

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

解答

第一步: 填圖。最小項 = $\{m_0, m_2, m_8, m_{10}\}$ ——恰好是卡諾圖的四個角落:

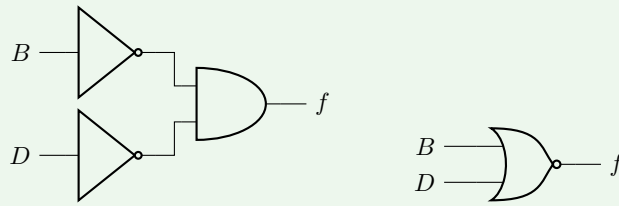
		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	0	0	1

第二步: 圈群 (一個 4 格群)。格雷碼讓最左欄 $\leftrightarrow$ 最右欄、最上列 $\leftrightarrow$ 最下列都相鄰, 所以四個角其實是一個 2×2 方塊。框內 A 、 C 都有變 (消去), $B = 0$ 、 $D = 0$ 不變。

第三步：最簡式。4 格消 2 個變數：

$$f = \neg B \wedge \neg D$$

第四步：電路 (2 NOT + 1 AND = 3 閘；或 1 個 NOR 閘： $\neg B \wedge \neg D = \neg(B \vee D)$)。



驗算： m_0 (0000)、 m_{10} (1010): $B=0, D=0 \Rightarrow 1$ ✓; m_5 (0101): $B=1 \Rightarrow 0$ ✓。

教學重點：卡諾圖其實是「甜甜圈」。平面只是畫法；拓撲上左右緣相接、上下緣相接（環面）。「四個角合成一群」是最容易漏看的迴繞——看到角落有 1，先檢查其他三個角。另外注意 De Morgan： $\neg B \wedge \neg D = \neg(B \vee D)$ ，一顆 NOR 就解決，比 3 顆閘更省。

10 第 10 題 (4 變數): 中央方塊—— $B \wedge D$

題目

求下列真值表的最簡布林式與電路：

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_5, m_7, m_{13}, m_{15}\}$ ——圖的正中央 2×2 ：

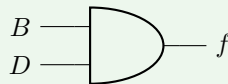
		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	0	0	0	0

第二步：圈群。一個 4 格方塊：列 ($AB \in \{01, 11\}$) 裡 A 有變、 $B = 1$ 不變；欄 ($CD \in \{01, 11\}$) 裡 C 有變、 $D = 1$ 不變。

第三步：最簡式。

$$f = B \wedge D$$

第四步：電路 (1 個 AND 閘)。



驗算：16 列中恰好 $B=1$ 且 $D=1$ 的四列 (m_5, m_7, m_{13}, m_{15}) 輸出 1 ✓，其餘 0 ✓。

教學重點：位置決定「長相」。同樣是 4 格群，第 9 題散在四角、本題聚在中央，本質相同：都是「兩個變數固定、兩個變數自由」。訣竅是別數格子的位置，而是讀出框內 哪些變數從頭到尾沒變。

11 第 11 題 (4 變數): 8 格大群 + 補一對—— $\neg B \vee (A \wedge C \wedge D)$

題目

求下列真值表的最簡布林式與電路：

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_0, \dots, m_3, m_8, \dots, m_{11}\} \cup \{m_{15}\}$ ：

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
	10	1	1	1	1

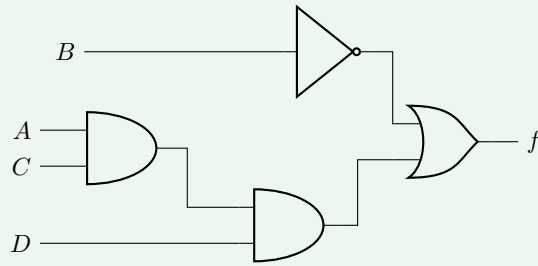
第二步：圈群。

- 8 格群（上下列迴繞）： $AB=00$ 整列與 $AB=10$ 整列相接；框內 A, C, D 都有變，只剩 $B=0 \Rightarrow \neg B$ —— 2^3 格一口氣消 3 個變數；
- 孤 1 補對： m_{15} (1111) 不在大群裡，它相鄰的 1 只有 m_{11} (1011)，成對後 B 消去 $\Rightarrow A \wedge C \wedge D$ （必要）。

第三步：最簡式。

$$f = \neg B \vee (A \wedge C \wedge D)$$

第四步：電路（1 NOT + 2 AND + 1 OR = 4 閘）。



驗算: $m_9 (1001)$: $\neg B = 1$ ✓; m_{15} : $ACD = 1$ ✓; $m_{13} (1101)$: $B=1$ 且 $C=0 \Rightarrow$ 兩項皆 0 ✓。

教學重點：大群優先，再救孤兒。先圈到最大的 $\neg B$ (8 格)，剩下的 m_{15} 再找最大的可用群收編——注意收編時可以「借用」已圈過的格子 (m_{11} 被圈第二次)，群才能大、變數才消得多。若怕重疊而讓 m_{15} 自成 1 格群，就會得到囉嗦的 $ABCD$ 四字面值項。

12 第 12 題 (4 變數): 4 格群 + 上下迴繞對——提取公因式

題目

求下列真值表的最簡布林式與電路：

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_1, m_3, m_5, m_7, m_9\}$ ：

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

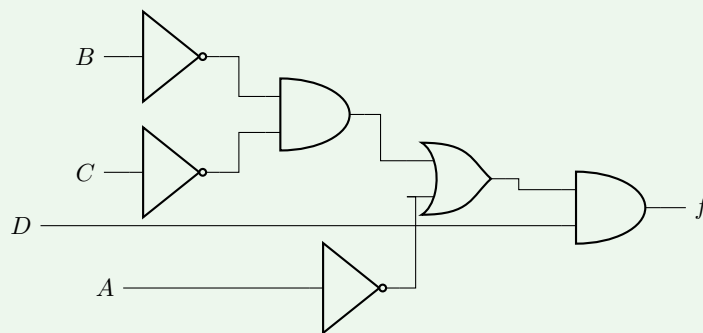
第二步：圈群。

- 4 格群 $\{m_1, m_3, m_5, m_7\}$ (左上 2×2): B, C 消去 $\Rightarrow \neg A \wedge D$ (m_5, m_7 只有它蓋, 必要);
- 迴繞對 $\{m_1, m_9\}$ ($CD=01$ 欄的頭尾兩格, 上下相接): A 消去 $\Rightarrow \neg B \wedge \neg C \wedge D$ (m_9 的唯一夥伴是 m_1 , 必要)。

第三步：最簡式。

$$f = (\neg A \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D)$$

第四步：電路。兩項都含 D , 提取後 $f = D \wedge (\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C))$: 3 NOT + 2 AND + 1 OR = 6 閘。



驗算: m_9 (1001): $D=1, \neg B\neg C = 1 \Rightarrow 1$ ✓; m_{11} (1011): $\neg A = 0, \neg C = 0 \Rightarrow 0$ ✓; m_7 (0111): $\neg AD = 1$ ✓。

教學重點：迴繞不只在左右。 m_1 (0001) 在最上列、 m_9 (1001) 在最下列，同一欄頭尾相接成合法的對子（兩者只差 A 位元）。另外，K-map 之後再做代數提取（此處提出公因式 D ）常能進一步省閘——K-map 保證 SOP 最簡，但「兩層 AND-OR」不一定是閘數最少的形狀。

13 第 13 題 (4 變數): 兩個 4 格群—— $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$

題目

求下列真值表的最簡布林式與電路:

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

解答

第一步: 填圖。最小項 = $\{m_2, m_3, m_6, m_7, m_{10}, m_{11}\}$:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	1	1
	01	0	0	1	1
	11	0	0	0	0
	10	0	0	1	1

第二步: 圈群 (兩個 4 格群, 共用 m_2, m_3)。

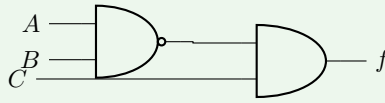
- 上方 2×2 ($AB \in \{00, 01\}$ 、 $CD \in \{11, 10\}$): B, D 消去 $\Rightarrow \neg A \wedge C$ (m_6, m_7 只有它蓋, 必要);
- 上下迴繞 2×2 ($AB \in \{00, 10\}$ 、 $CD \in \{11, 10\}$): A, D 消去 $\Rightarrow \neg B \wedge C$ (m_{10}, m_{11} 只有它蓋, 必要)。

六個 1 無法圈成 8 格群 (不成矩形), 兩群即最簡。

第三步: 最簡式。

$$f = (\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C) = C \wedge \neg(A \wedge B)$$

第四步：電路。SOP 直譯要 5 閘；提取 C 後 $f = C \wedge \neg(A \wedge B)$ ，用 1 NAND + 1 AND = 2 閘：



驗算： $f = 1$ 需要 $C=1$ 且「 A, B 不同時為 1」： $m_{14}(1110)$: $AB=11 \Rightarrow 0$ ✓； $m_{10}(1010)$: $C=1$ 、 $AB \neq 11 \Rightarrow 1$ ✓； $m_1(0001)$: $C=0 \Rightarrow 0$ ✓。

教學重點：De Morgan 是省閘神器。 $\neg A \vee \neg B = \neg(A \wedge B)$ ——兩顆反相器加一顆 OR，坍縮成一顆 NAND。第 1.4 講「NAND 萬能」的實戰意義就在這：化簡後多看一眼有沒有 $\neg x \vee \neg y$ 或 $\neg x \wedge \neg y$ 的模式，直接換成 NAND / NOR。

14 第 14 題 (4 變數): 質數偵測器——必要項與自由選擇

題目

輸入 A, B, C, D 是 4 位元二進位數 N (A 為最高位, $N = 0 \sim 15$)。當 N 是質數 (2, 3, 5, 7, 11, 13) 時 $f = 1$ 。真值表：

N	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1

N	A	B	C	D	f
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

解答

第一步：填圖。最小項 = $\{m_2, m_3, m_5, m_7, m_{11}, m_{13}\}$ ：

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	1	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	0	0
	10	0	0	1	0

第二步：先鎖定必要群。沒有 4 格以上的矩形，逐一問「這個 1 有哪些可成的對」：

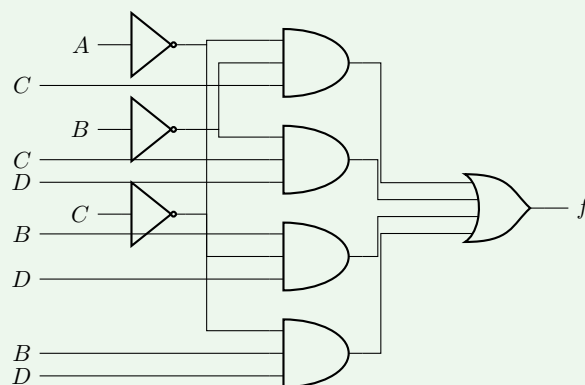
- m_2 ：唯一相鄰的 1 是 $m_3 \Rightarrow \neg A \neg BC$ (必要，蓋 m_2, m_3)；
- m_{11} ：唯一相鄰的 1 是 m_3 (上下迴繞) $\Rightarrow \neg BCD$ (必要，蓋 m_{11}, m_3)；
- m_{13} ：唯一相鄰的 1 是 $m_5 \Rightarrow B \neg CD$ (必要，蓋 m_{13}, m_5)；
- 剩 m_7 未蓋：它可以配 m_5 ($\Rightarrow \neg ABD$) 或配 m_3 ($\Rightarrow \neg ACD$) ——任選其一，兩種都最簡。

第三步：最簡式 (擇 $\neg ABD$)。

$$f = \neg A \neg BC \vee \neg BCD \vee B \neg CD \vee \neg ABD$$

(把最後一項換成 $\neg ACD$ 亦為最簡。)

第四步：電路。用 3 輸入 AND 與 4 輸入 OR 畫骨架 (實作時各拆成兩顆 2 輸入閘即可)； $\neg A$ 、 $\neg B$ 、 $\neg C$ 各一顆反相器共用：



驗算： $N=9$ (1001)：四項依序 $\neg A=0$ ✗、 $C=0$ ✗、 $B=0$ ✗、 $\neg A=0$ ✗ $\Rightarrow 0$ ✓ (9 不是質數)； $N=13$ (1101)： $B \neg CD = 1$ ✓； $N=15$ (1111)： $\neg A=0$ 、 $\neg B=0$ 、 $\neg C=0 \Rightarrow 0$ ✓。

教學重點：完整的質蘊涵項流程。這題把 Quine–McCluskey 的精神走了一遍：(1) 列出所有質蘊涵項（可成的最大群）；(2) 找必要的（某個 1 只有它能蓋）；(3) 剩餘的 1 用最少的群補滿——補的時候若有多種選擇，任一種都算最簡解。考卷上寫「 m_7 取 $\neg ABD$ 或 $\neg ACD$ 皆可」會讓閱卷者知道你真的懂。

15 第 15 題 (5 變數): 雙層卡諾圖—— $(\neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge E)$

題目

$f(A, B, C, D, E)$ 由最小項給定 (A 為最高位):

$$f = \Sigma m(2, 3, 10, 11, 18, 19, 25, 26, 27, 29, 31).$$

等價的功能描述: 「 $C=0$ 且 $D=1$ 」時輸出 1; 另外「 $A=B=E=1$ 」時也輸出 1。請畫出 5 變數卡諾圖 ($A=0$ 與 $A=1$ 兩層)、求最簡布林式並畫出電路。

解答

第一步：分層填圖。5 變數 $= 2^5 = 32$ 格，拆成兩張 4×4 圖：左層 $A=0$ (m_0-m_{15})、右層 $A=1$ ($m_{16}-m_{31}$ ，層內編號減 16)。兩層同位置的格子互為相鄰（只差 A ）。

		DE			
		00	01	11	10
BC	00	0	0	1	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	0	1	1

$A = 0$

		DE			
		00	01	11	10
BC	00	0	0	1	1
	01	0	0	0	0
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	1

$A = 1$

第二步：圈群（跨層思考）。

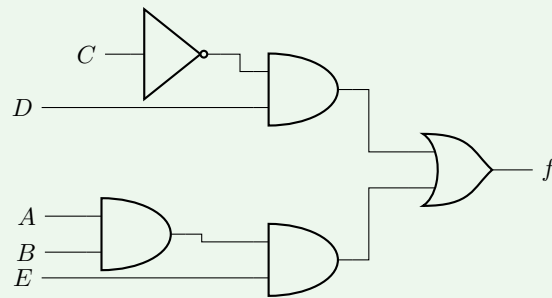
- 跨兩層的 8 格群：兩層的相同位置各有一個「 $BC=00$ 列與 $BC=10$ 列、 $DE \in \{11, 10\}$ 欄」的迴繞 2×2 (m_2, m_3, m_{10}, m_{11} 層內編號)。上下疊起來共 8 格： A, B, E 都有變，只剩 $C=0, D=1 \Rightarrow \neg C \wedge D$ （消 3 個變數!）；
- $A=1$ 層內的 4 格方塊 $\{m_9, m_{11}, m_{13}, m_{15}\}$ （層內編號； $BC \in \{10, 11\}$ 、 $DE \in \{01, 11\}$ ）： C, D 消去，加上整群都在 $A=1$ 層 $\Rightarrow A \wedge B \wedge E$ 。

m_{29}, m_{31} 只有第二群能蓋、 m_2 等只有第一群能蓋，兩群皆必要且已蓋滿全部 11 個 1。

第三步：最簡式。

$$f = (\neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge E)$$

第四步：電路 (1 NOT + 3 AND + 1 OR = 5 閘)。



驗算： $m_{27}(11011): C=0, D=1 \Rightarrow$ 第一項 $= 1$ ✓ (它同時也滿足 ABE ——重疊無妨)； $m_{29}(11101): C=1$ 使第一項 $= 0$ ，但 $A=B=E=1 \Rightarrow 1$ ✓； $m_{17}(10001): D=0$ 且 $B=0 \Rightarrow 0$ ✓。

教學重點：第三個維度。 5 變數把「甜甜圈」再加一維：同位置的上下兩層格子相鄰。圈群時先問「這個群兩層都有嗎？」——有就把 A 消掉 (本題的 $\neg CD$)；只出現在單層的群則保留 A 或 $\neg A$ (本題的 ABE)。Lab 1 的第 5 題用的正是同一招。

16 總結：15 題速查表

題	最小項	最簡布林式	本題教的招
1	$\Sigma m(1, 2, 3)$ (2 變數)	$A \vee B$	群可以重疊
2	$\Sigma m(1, 2)$ (2 變數)	$A \oplus B$	對角 1 = XOR，圈不動
3	$\Sigma m(0, 2, 4, 6)$	$\neg C$	4 格群消 2 變數、左右迴繞
4	$\Sigma m(3, 5, 6, 7)$	$AB \vee AC \vee BC$	多數決、三群共用一格
5	$\Sigma m(0, 4, 5, 7)$	$\neg B \neg C \vee AC$	從最挑剔的 1 下手
6	$\Sigma m(1, 2, 3, 7)$	$\neg AC \vee \neg AB \vee BC$	三對子皆必要、共用反相器
7	$\Sigma m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$	$\neg A \neg B \vee AC \vee B \neg C$ 等	循環圖、最簡解不唯一
8	$\Sigma m(1, 2, 4, 7)$	$A \oplus B \oplus C$	棋盤格 = 同位、用 XOR
9	$\Sigma m(0, 2, 8, 10)$	$\neg B \neg D = \neg(B \vee D)$	四角迴繞、NOR 省閘
10	$\Sigma m(5, 7, 13, 15)$	BD	中央方塊
11	$\Sigma m(0-3, 8-11, 15)$	$\neg B \vee ACD$	8 格群 + 借格救孤 1
12	$\Sigma m(1, 3, 5, 7, 9)$	$\neg AD \vee \neg B \neg CD$	上下迴繞、提取公因式
13	$\Sigma m(2, 3, 6, 7, 10, 11)$	$C \wedge \neg(AB)$	De Morgan 換 NAND
14	$\Sigma m(2, 3, 5, 7, 11, 13)$	四項 SOP (見內文)	必要項 + 自由選擇
15	$\Sigma m(2, 3, 10, 11, 18, 19, 25, 26, 27, 29, 31)$	$\neg CD \vee ABE$	雙層 (5 變數) K-map

通用檢查清單（考前背這五條）：

1. 行列標籤是格雷碼（00, 01, 11, 10）了嗎？
2. 每個群都是 2^k 格的矩形嗎？有沒有更大的圈法？
3. 迴繞檢查過了嗎（左右、上下、四角、跨層）？
4. 每個群至少擁有一個「別群蓋不到」的 1 嗎（否則它是多餘的）？
5. 化簡完，代 2-3 列回真值表驗算了嗎？